ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2018.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	**25**	**25**	**25**	**25**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Kakav uslov moraju zadovoljavati brojevi a i b da bi važila jednakost

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{5b}{c}=\left(\frac{b}{c}\right)^2+\frac{5a}{c}$$

2. Dat je prirodan broj djeljiv sa 495. Između dvije njegove cifre su ubačene dvije nule. Dokazati da je dobijeni broj djeljiv sa 495.

3. U državi je 150 gradova, koji su povezani prugom. Neki od tih gradova su povezani brzim vozovima, koji se ne zaustavljaju na međustanicama. Poznato je sledeće: Svaka četiri grada se mogu podijeliti u dvije grupe od po dva grada, tako da su gradovi u istoj grupi povezani brzim vozom.

a) Dokazati da svaki grad mora biti povezan brzim vozom sa bar 147 drugih gradova.

b) Koji je najmanji broj parova gradova koji su povezani brzim vozom?

4. Na strani AB trougla ABC sa tupim uglom kod tjemena C izabrane su tačke P i Q takve da je $AP=BC$ i $BQ=AC$. Neka su M, N i K redom sredine duži AB, CP i CQ redom. Dokazati da je

$$2\angle NMK+\angle ACB=180^\circ$$

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Pomnožimo čitavu jednačinu sa c^2. Dobijamo

$$a^2 + 5bc = b^2 + 5ac.$$

Dalje, prebacimo član $5ac$ na lijevu, a $5bc$ na desnu stranu, pa imamo

$$a^2 - 5ac = b^2 - 5bc.$$

Dopunimo lijevu i desnu stranu jednakosti do kvadrata binoma dodajući $\frac{25c^2}{4}$ sa obje strane jednakosti. Naša jednakost postaje

$$\left(a - \frac{5c}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{5c}{2}\right)^2$$

odakle je

$$a - \frac{5c}{2} = b - \frac{5c}{2} \text{ ili } a - \frac{5c}{2} = -b + \frac{5c}{2}.$$

Dakle, brojevi a i b moraju zadovoljavati uslov $a = b$ ili uslov $a + b = 5c$.

2. Označimo sa A i B dijelove datog prirodnog broja X koji se nalaze prije i poslije dvije nule koje su ubačene. Tada je $X = A \cdot 10^n + B$, a broj dobijen nakon ubacivanja nula je $Y = A \cdot 10^{n+2} + B$, za neko n iz skupa prirodnih brojeva. Dalje je

$$Y - X = (A \cdot 10^{n+2} + B) - (A \cdot 10^n + B) = A \cdot 10^n(10^2 - 1) = 99 \cdot A \cdot 10^n.$$

Kako je $n \geq 1$, dobijamo $Y - X = 990 \cdot A \cdot 10^{n-1} = 2 \cdot 495 \cdot A \cdot 10^{n-1}$, odnosno imamo da je broj $Y - X$ djeljiv sa 495. Kako je i X djeljiv sa 495, to je i $Y = X + Y - X$ djeljiv sa 495.

3. a) Pretpostavimo da je jedan od 150 gradova povezan brzim vozom sa najviše 146 ostalih gradova. Posmatrajmo grupu koju čine taj grad i tri grada sa kojima nije povezan brzim vozom. Ova četiri grada ne zadovoljavaju uslov zadatka, jer ih ne možemo podijeliti u dvije grupe od po dva grada koji su međusobno povezani, pa dolazimo do kontradikcije. Zaključujemo da svaki grad mora biti povezan brzim vozom sa bar 147 drugih.

b) Kako je svaki grad povezan brzim vozom sa bar 147 drugih gradova, to parova međusobno povezanih gradova ima bar $\frac{147\cdot 150}{2}=11025$. Dokažimo da je to i minimalan broj parova međusobno povezanih gradova.

Označimo gradove sa $A_1, A_2, \dots, A_{150}$. Na kružnici poređajmo redom 150 tačaka i označimo ih sa 1, 2, ..., 150. Formirajmo željezničku mrežu na sledeći način: Gradovi A_i i A_j su povezani brzim vozom ako tačke i i j nisu susjedne na kružnici. Kako svaka tačka na kružnici ima tačno dva susjeda, to je svaki grad povezan brzim vozom sa tačno 147 drugih gradova, pa ima tačno

$\frac{147\cdot 150}{2}=11025$ parova međusobno povezanih gradova. Sa druge strane, za svaka četiri grada A_i, A_j, A_k i A_l, ako je $i<j<k<l$, to je grad A_i povezan brzim vozom sa gradom A_k, a grad A_j sa gradom A_l, pa je zadovoljen uslov zadatka.

4. Povucimo pravu koja sadrži srednju liniju NK trougla CPQ. Presjek te prave sa stranicama BC i AC označimo sa A_1 i B_1, respektivno. Kako je prava koja sadrži duž NK paralelna stranici AB, i kako su N i K sredine stranica CP i CQ, zaključujemo da su A_1 i B_1 sredine stranica BC i AC, odnosno da je A_1B_1 srednja linija trougla ABC. Označimo $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\alpha=\angle CAB$, $\beta=\angle ABC$, $\gamma=\angle BCA$ i $\varepsilon=\angle KMN$.

Lako se vidi da je $AQ=c-b$, $BP=c-a$, kao i $B_1K=\frac{c-b}{2}$, $A_1N=\frac{c-a}{2}$, $A_1B_1=\frac{c}{2}$ (kao srednje duži trouglova ACQ, BPC i ABC, respektivno). Kako su četvorouglovi AB_1A_1M i BMB_1A_1 paralelogrami, vidimo da je $\angle B_1A_1M=\alpha$ i $\angle MB_1A_1=\beta$.

Dalje je $B_1N=A_1B_1-A_1N=\frac{a}{2}=B_1M$, pa je trougao B_1MN jednakokraki. Označimo ugao $x=\angle B_1NM$. Tada je $\angle B_1MK=x-\varepsilon$. Označimo sada sa $y=\angle MKA_1$, spoljašnji ugao trougla B_1MK. Vidimo da je $y=\beta+x-\varepsilon$.

Analogno dobijamo $x = \alpha + y - \varepsilon$. Sređivanjem ovih jednačina dobijamo $2\varepsilon = \alpha + \beta = 180^{\circ} - \gamma$. Odavde je $2\varepsilon + \gamma = 180^{\circ}$, što je i trebalo dokazati.