ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

# DRŽAVNO TAKMIČENJE 2019.

ŠIFRA UČENIKA

## OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

# MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

..............................................................

..............................................................

Podgorica, ........................................................ 20......... godine

# <u>UPUTSTVO ZA TAKMIČARE</u>

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

| Zadatak | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| **Maksimalan broj poena** | **25** | **25** | **25** | **25** |

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

**SREĆNO!**

# ZADACI

**1.** Neka su $a$, $b$ i $c$ prirodni brojevi za koje važi $a+b=ab-bc$ i $c+1$ je kvadrat nekog prostog broja. Dokazati da je bar jedan od brojeva $a+b$ ili $ab$ potpun kvadrat.

**2.** Svaka od 111 porodica ima tri člana: oca, majku i dijete. Ove 333 osobe smo poređali u vrstu, tako da je u svakoj porodici jedan roditelj lijevo od svog djeteta, a drugi desno (ne moraju stajati neposredno pored djeteta). Dokazati da je bar jedna od centralnih 111 osoba dijete.
Komentar: Ako, na primjer, 15 osoba poređamo u vrstu, centralnih 5 pozicija zauzimaju osobe na pozicijama 6, 7, 8, 9 i 10.

**3.** U trouglu $ABC$ težišna duž $BM$ je dva puta kraća od stranice $AB$ i sa njom obrazuje ugao od $40^\circ$. Naći ugao $\angle ABC$.

**4.** Na kružnici je napisano 2019 pozitivnih brojeva. Za svaka četiri uzastopna broja $a$, $b$, $c$ i $d$, posmatrano u smjeru kazaljke na satu, važi:

$$a+b>\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Dokazati da je proizvod svih 2019 brojeva veći od 1.

# RJEŠENJA ZADATAKA

**1.** Neka je $c+1=p^2$, za prost broj $p$. Zadatu jednakost prepišimo kao

$$c+1=a-\frac{a}{b}$$

Kako su $c+1$ i $a$ cijeli brojevi, zaključujemo da je i $\frac{a}{b}$ cio broj. Označimo ga sa $k$.

Dalje je $p^2=c+1=k(b-1)$, pa imamo tri mogućnosti:

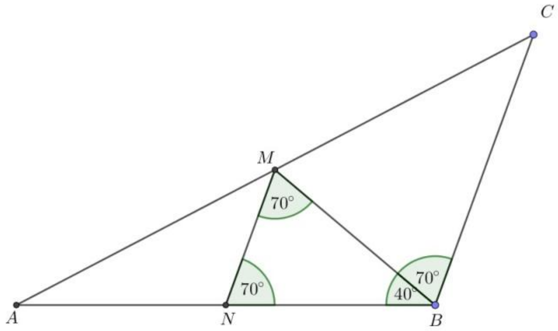
a) $k=1$, pa je $a=b$, odnosno $ab$ je potpun kvadrat;

b) $k=p$ i $b-1=p$, odnosno $b=p+1$. Iz $a=kb=p^2+p$ dobijamo $a+b=p^2+2p+1=(p+1)^2$, tj. $a+b$ je potpun kvadrat;

c) $k=p^2$ i $b-1=1$, odnosno $b=2$. Odavde je $a=2p^2$, pa je $ab=4p^2=(2p)^2$ potpun kvadrat.

**2.** Roditelja koji se nalazi lijevo od svog djeteta u vrsti ćemo nazivati lijevim roditeljem, a onog koji se nalazi desno od djeteta desnim. Podijelimo vrstu u tri grupe: grupa A(prvih 111 osoba), grupa B(poslednjih 111 osoba) i grupa C (centralnih 111 osoba). Pretpostavimo da u grupi C nema djece, odnosno da su sva djeca u grupama A i B. Kako djece ima 111, to po Dirihleovom principu jedna od ove dvije grupe ima bar 56 djece. Ako je to grupa A, tada se u toj grupi mora naći i još bar 56 lijevih roditelja, odnosno grupa A mora imati bar 112 osoba, što je nemoguće. Analogno, ako grupa B ima bar 56 djece, u njoj mora biti bar još 56 desnih roditelja, što je nemoguće jer grupa ima 111 osoba. Dakle, naša pretpostavka nije tačna, pa u grupi C mora biti bar jedno dijete.

**3.** Označimo sa $N$ središte stranice $AB$ datog trougla. Tada je $MN$ srednja duž trougla $ABC$, pa je paralelna stranici $BC$. Trougao $BMN$ je jednakokraki ($BM=BN=\frac{AB}{2}$), i ugao $\angle NBM=40^\circ$, pa su uglovi $\angle BMN=\angle MNB=70^\circ$. Kako su uglovi $\angle BMN$ i $\angle MBC$ Z-uglovi, zaključujemo da su oni jednaki. Na kraju, $\angle ABC=\angle ABM+\angle MBC=40^\circ+70^\circ=110^\circ$.




**4.** Uslov da za svaka četiri uzastopna broja $a, b, c$ i $d$ na krugu važi $a+b>\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ možemo zapisati kao $(a+b)cd>c+d$.

Sada označimo brojeve na kružnici sa $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$. Tada je $(x_1+x_2)x_3x_4>x_3+x_4$, $(x_2+x_3)x_4x_5>x_4+x_5$, ..., $(x_{2019}+x_1)x_2x_3>x_2+x_3$. Neka je $X=(x_1+x_2)(x_2+x_3)\dots(x_{2019}+x_1)$. Množenjem svih dobijenih nejednakosti dobijamo $X\,(x_1x_2\dots x_{2019})^2>X$, pa je $(x_1x_2\dots x_{2019})^2>1$, odnosno $x_1x_2\dots x_{2019}>1$.